



第三章

離散及連續型機率分配



機率之基本概念

1. 機率之基本概念

- 實驗
- 簡單事件
- 樣本空間
- 事件及計算事件發生機率之步驟

2. 定義

- 理論及實驗方式

3. 排列及組合



機率之基本概念

4. 五種計算機率之法則

5. 貝氏定理：

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(B)} \quad (\text{利用樹形圖計算})$$

6. 隨機變數：連接物理世界與數學世界之實函數

7. 機率分配： $P(x_i)$

8. 期望值：

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n X_i p(x_i)$$

3



機率之基本概念

9. 變異數：

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 p(x_i)$$

10. 標準差：

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^k (X_i - \mu)^2 p(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (X - \mu)^2 \left(\frac{f_i}{N}\right)}$$

4



機率之定義

1. 理論 (每一種實驗結果發生之可能性均相同)：

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

其中： N = 實驗所有可能結果之個數

N_A = 發生事件 A 結果之個數

5



機率之定義

2. 實驗方式 (相對次數定義)：

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n_A}{n} \right]$$

其中： n = 實驗進行之次數

n_A = A 事件發生之次數

(例) 觀察一個公正骰子投擲二次之結果，

試問發生點數和為7之機率？

6



機率之定義

3. 計算事件發生機率之步驟：

1. 實驗之定義
2. 列出簡單事件
3. 指派簡單事件之機率
4. 決定欲求事件(簡單事件之集合)之機率

7



五種計算機率之法則

1. 互補定律

$P(\sim A) = 1 - P(A)$: A 事件不發生之機率 = $1 - A$ 事件發生之機率

2. 互斥事件之加法定律

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$: 若 A 與 B 為兩互斥事件，則 A 與 B 發生之機率為 A 與 B 個別發生之機率和

3. 非互斥事件之加法定律

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

8



五種計算機率之法則

4. 獨立事件之乘法定律

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ：若 A 與 B 為兩獨立事件，則 A 與 B 同時發生之機率為 A 與 B 個別發生機率之乘積

5. 相依事件之乘法定律

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B)$$

9



貝氏定理

若互斥事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 均為 B 事件發生的原因，則在 B 條件下， A_i 事件發生之機率為

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(B)}$$

其中

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A_1) \cdot P(A_1) + P(B | A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B | A_n) \cdot P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i) \end{aligned}$$

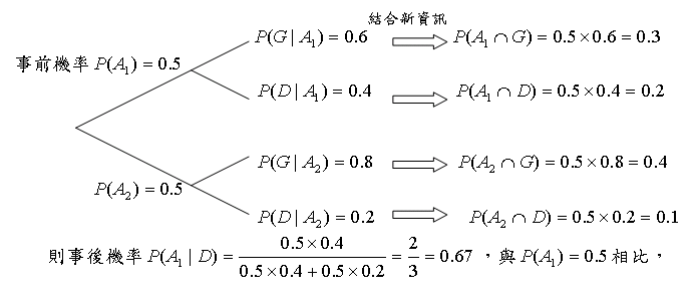
$P(A_i)$ 稱為事前機率 (prior probability)，為取得新資訊之機率，則稱為事後機率。

10

〈範例 4〉甲袋中有 3 個良品，2 個不良品，乙袋中有 4 個良品，1 個不良品，今從甲、乙二袋中之一袋取出一個產品，已知其為不良品，求此不良品取自甲袋之機率？

【解】

令 $P(A_1)$ 為取自甲袋 (A_1) 之機率 } 事前機率，若無產品之新資訊，則
 $P(A_2)$ 為取自乙袋 (A_2) 之機率 }
 $P(A_1) = 0.5$ ， $P(A_2) = 0.5$ ，即此產品取自甲袋及乙袋之機率 = 0.5。
 令 G 代表良品，D 為不良品，則 $P(G|A_1) = 0.6$ ， $P(G|A_2) = 0.8$ ，
 $P(D|A_1) = 0.4$ ， $P(D|A_2) = 0.2$



我們可以發現此不良品取自甲袋之機率較乙袋為高，因此吾人應先從甲袋（供應商）著手進行品質改善。

11

離散型機率分配

A. 二項分配(取出後放回)

考慮伯努利實驗進行 n 次之結果，則 n 次獨立實驗中 x 次成功之機率可寫成

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\mu = np, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

12



〈範例 6〉已知某批量 N 個產品中，今有 k 個不良品及個良品，若吾人從中抽取 n 個樣本，試求 n 個中含有 x 個不良品之機率。

〈解〉

令 X 為 n 個樣本中含不良品之個數，已知不良率 $p = \frac{k}{N}$ ，則

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \left(\frac{k}{N}\right)^x \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-x}, \text{ 其中 } x=0, 1, 2, 3, \dots, n。$$

若不良率 $p=0.4$ ， $n=20$ ，則不良品少於 3 個之機率

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.0036。$$

13



離散型機率分配

B. 超幾何分配(取出後不放回)

考慮自批量中取出樣本檢驗，檢驗後不放回，則
批量中含不良品之機率

$$P(X=x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \text{ 其中 } \begin{cases} N - \text{批量大小} \\ n - \text{樣本大小} \\ k - \text{批量中所含不良品之個數} \\ x - \text{樣本中所含不良品之個數} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = n \left(\frac{k}{N}\right) \left(1 - \frac{k}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

14

〈範例 7〉已知某批量 20 個產品中，含有 4 個不良品，今若吾人隨機取出 5 個產品，試求其中含有一個不良品之機率及不含任何不良品之機率。

〈解〉

已知 $N=20$ ， $n=5$ ， $k=4$ ， $x=1$ ，則

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{16}{4}}{\binom{20}{5}} = 0.4696, \quad P(X=0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} = 0.2817。$$

若 $x \leq 1$ 可接受此批量，則此批量被允收之機率

$$P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = 0.4696 + 0.2817 = 0.7513。$$

15

離散型機率分配

C. 卜瓦松分配是二項分配之極限式

當 $n \rightarrow \infty$ 且 p 很小，則 x 發生之機率寫成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \text{其中 } \lambda = np, \quad p = \frac{\lambda}{n}$$

則

$$P(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \text{其中, } x=0,1,2,\dots, \lambda = \text{單位時間內缺點平均發生之次數} \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$$

$$E(X) = \mu = \lambda, \quad V(X) = \lambda, \quad \sigma = \sqrt{\lambda}$$

16



〈範例 8〉已知某一地毯公司所生產之地毯平均每3公尺有2個缺點，試求9公尺地毯上有5個以上缺點之機率為何？

《解》

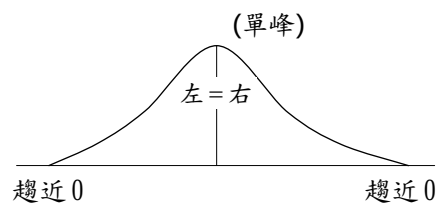
令 X 為每 9 公尺地毯所含之缺點數，則 $\lambda = 2 \times \frac{9}{3} = 6$ （缺點/9 公尺地毯）。

$$\begin{aligned}\text{故, } P(X \geq 5) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{x=0}^4 \frac{e^{-6} 6^x}{x!} \quad (\text{查附表 8.1}) \\ &= 1 - 0.285 = 0.715\end{aligned}$$

17



常態機率分配之特性

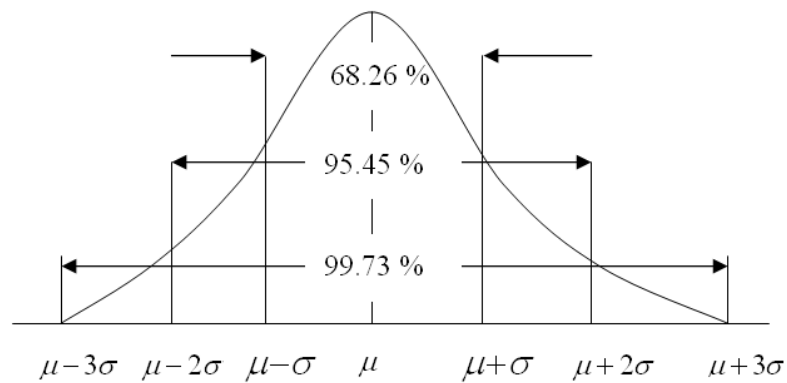


- 左右對稱
- 倒鐘形之連續曲線
- 單峰
- 若資料遠離製程中心，則機率將迅速趨近0

18



常態分配之信賴區間

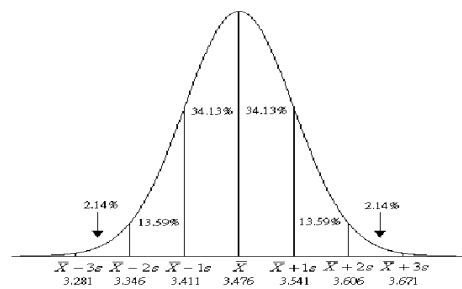


19



〈例9〉已知金屬塊厚度是常態分配，
其 $\bar{X} = 3.476$ mm， $S = 0.065$ mm，試求其99.73 %，
95.45 %及68.26 %之信賴區間。

〈解〉



$\bar{X} = 3.476$ mm
 $S = 0.065$ mm
 $n = 1000$

金屬塊厚度之常態分配圖

68.26 %之信賴區間 $(\bar{X} \pm 1S) = [3.411, 3.541]$
95.45 %之信賴區間 $(\bar{X} \pm 2S) = [3.346, 3.606]$
99.73 %之信賴區間 $(\bar{X} \pm 3S) = [3.281, 3.671]$

20

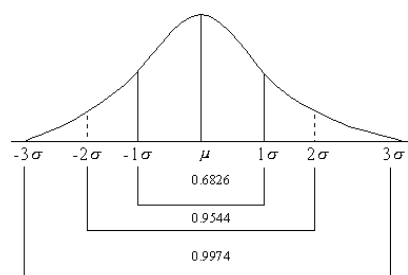


常態分配

1. 機率密度函數：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \begin{cases} \mu = \text{母體平均} \\ \sigma = \text{母體標準差} \end{cases}$$

2. 特性(I)



21



常態分配

2. 特性(II)：

以 $(\bar{X}, S)$ 估計 (μ, σ)

3. 標準轉換：

以 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ 將變數 x 轉換成 z ，則 $N(\mu, \sigma^2)$ 可寫成

$N(0,1)$

22



常態分配

4. 應用：

已知 (μ, σ) ，求大於或小於 x 之機率

步驟：1. 繪出常態曲線

2. 在曲線中找出 x 之位置

3. 計算 Z 值

4. 從常態機率表中查出小於 Z 值之面積，即可求算出其機率

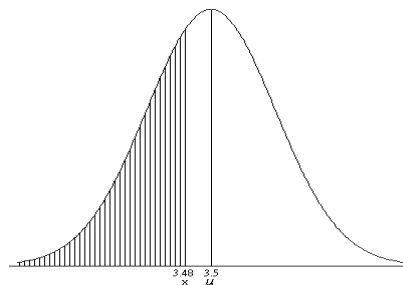
註： $P(Z > Z_1) = 1 - P(Z \leq Z_1) = 1 - \Phi(Z_1) = \Phi(-Z_1)$

23



例2〉已知金屬塊之厚度呈常態分配， $\mu = 3.5\text{mm}$ ， $\sigma = 0.05\text{mm}$ ，試求金屬塊厚度小於規格下限(3.48 mm)之機率。

解
〉



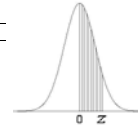
$$\therefore Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \therefore Z = \frac{3.48 - 3.5}{0.05} = -0.40$$

查表可求得 $Z=0$ (即 $\mu=3.5$) 與 $Z=-0.4$ (即 $\mu=3.48$) 間之面積為 0.1554，則 $P(X < 3.48) = 0.5 - 0.1554 = 0.3446$ ，即該產品之不良率為 34.46 %。

24

表 3.1 常態機率表

z	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600	0.0700	0.0800
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986
3.0	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990
4.0	0.4999								



超幾何，二項，卜瓦松及常態分配間之關係

